Université A. MIRA de Béjaia
Faculté Sciences Exactes L2.
Département Informatique

## Logique mathématique

# Correction de la série de TD 2 (2014-2015)

**Exercice 1 :**

**1.** Montrons que : $\alpha \Rightarrow \gamma, \beta \Rightarrow \sigma, \overline{\gamma} \vee \vee \overline{\sigma} \Rightarrow \overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$.

**Preuve :**

(1) $\alpha \Rightarrow \gamma$, ..... Hypothèse 1.
(2) $\beta \Rightarrow \sigma$, ..... Hypothèse 2.
(3) $\overline{\gamma} \vee \overline{\sigma}$, ..... Hypothèse 3.
(4) $\overline{\sigma} \vee \overline{\gamma}$, ..... Règle III sur (3).
(5) $\sigma \Rightarrow \overline{\gamma}$, ..... Abréviation $\Rightarrow$.
(6) $\beta \Rightarrow \overline{\gamma}$, ..... Règle S (2, 5).
(7) $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$, ..... Définition $\Rightarrow$.
(8) $\overline{\gamma} \vee \overline{\beta}$, ..... Règle III sur (7).
(9) $\gamma \Rightarrow \overline{\beta}$, ..... Abréviation $\Rightarrow$.
(10) $\alpha \Rightarrow \overline{\beta}$, ..... Règle S (1, 9).
(11) $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$, ..... Définition $\Rightarrow$.

**2.** Montrons que : $\alpha \Rightarrow \beta, \gamma \Rightarrow \sigma \vdash \alpha \wedge \gamma \Rightarrow \beta \vee \sigma$.

**Preuve :**

(1) $\alpha \Rightarrow \beta$, ..... Hypothèse 1.
(2) $\gamma \Rightarrow \sigma$, ..... Hypothèse 2.
(3) $x \Rightarrow (x \vee y)$, ..... $(H.A)_2$.
(4) $\beta \Rightarrow \beta \vee \sigma$, ..... Substitution $(x := \beta, y := \sigma)$ dans (3).
(5) $\alpha \Rightarrow \beta \vee \sigma$, ..... Règle S (1, 4).
(6) $(x \wedge y) \Rightarrow x$, ..... Théorème 15.
(7) $(\alpha \wedge \gamma) \Rightarrow \alpha$, ..... Substitution $(x := \alpha, y := \gamma)$ dans (6).
(8) $(\alpha \wedge \gamma) \Rightarrow \beta \vee \sigma$, ..... Règle S (7, 5).



**Exercice 2 :**

**1.** Montrons que : $\vdash \overline{\overline{\beta}} \Rightarrow \beta$.

**Preuve :**

(1) $x \Rightarrow \overline{\overline{x}}$, ..... Condition nécessaire du Théorème 2.
**( Remarque : Ce que nous allons démontrer c'est la condition suffisante de ce théorème, donc on peut supposé que la condition nécessaire est démontrée et l'utilisée mais on ne peut pas utiliser le théorème en entier directement.)**
(2) $\overline{x} \vee \overline{\overline{x}}$, ..... Définition de $\Rightarrow$.
(3) $\overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{x}}$, ..... Substitution $(x := \overline{x})$ dans (2).
(4) $\overline{x} \Rightarrow \overline{\overline{x}}$, ..... Abréviation de $\Rightarrow$.
(5) $x \vee \overline{x} \Rightarrow x \vee \overline{\overline{x}}$, ..... Règle IV.
(6) $x \vee \overline{x}$, ..... Théorème 4.
(7) $x \vee \overline{\overline{x}}$, ..... Modus Ponen (6, 5).
(8) $\beta \vee \overline{\overline{\beta}}$, ..... Substitution $(x := \beta)$.
(9) $\overline{\overline{\beta}} \vee \beta$, ..... Règle III.
(10) $\overline{\overline{\beta}} \Rightarrow \beta$, ..... Abréviation $\Rightarrow$.

**2.** Montrons que : $\vdash \beta \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}$.

**Preuve :**

(1) $x \vee \overline{x}$, ..... Théorème 4.
(2) $\overline{\beta} \vee \overline{\overline{\beta}}$, ..... Substitution $(x := \overline{\beta})$ dans (1).
(3) $\beta \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}$, ..... Abréviation $\Rightarrow$.

**3.** Montrons que : $\vdash \overline{\alpha} \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$.

**Preuve :**

(1) $x \Rightarrow (x \vee y)$, ..... $(H.A)_2$.
(2) $\overline{\alpha} \Rightarrow (\overline{\alpha} \vee \beta)$, ..... Substitution $(x := \overline{\alpha}, y := \beta)$ dans (1).
(3) $\overline{\alpha} \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$, ..... Abréviation $\Rightarrow$.

**4.** Montrons que : $\vdash (\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow [(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta]$.

**Preuve :**

(1) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow [(z \vee x) \Rightarrow (z \vee y)]$, ..... $(H.A)_4$
(2) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow [(\beta \vee \alpha) \Rightarrow (\beta \vee \beta)]$, ..... Substitution $(x := \alpha, y := \beta, z := \beta)$.
(3) $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\overline{y} \Rightarrow \overline{x})$, ..... Théorème 5.

(4) $\Big[(x \Rightarrow y) \Rightarrow (\overline{y} \Rightarrow \overline{x})\Big] \wedge \Big[(\overline{y} \Rightarrow \overline{x}) \Rightarrow (x \Rightarrow y)\Big]$, ..... Définition $\Leftrightarrow$.

(5) $\Big[(\overline{y} \Rightarrow \overline{x}) \Rightarrow (x \Rightarrow y)\Big]$, ..... Règle V.

(6) $(\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$, ..... Substitution $(x := \alpha, y := \beta)$.

(7) $(\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow \Big[(\beta \vee \alpha) \Rightarrow (\beta \vee \beta)\Big]$, ..... Règle S (2, 6).

(8) $(x \vee x) \Rightarrow x$, ..... $(H.A)_1$.

(9) $(\beta \vee \beta) \Rightarrow \beta$, ..... Substitution $(x := \beta)$ dans (8).

(10) $\Big[\overline{(\overline{\beta} \vee \alpha)} \vee (\beta \vee \beta)\Big] \Rightarrow \Big[\overline{(\overline{\beta} \vee \alpha)} \vee \beta\Big]$, ..... Règle IV.

(11) $\Big[(\beta \vee \alpha) \Rightarrow (\beta \vee \beta)\Big] \Rightarrow \Big[(\beta \vee \alpha) \Rightarrow \beta\Big]$, ..... Abréviation $\Rightarrow$.

(12) $(\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow \Big[(\beta \vee \alpha) \Rightarrow \beta\Big]$, ..... Règle S(7, 11).

(13) $(\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow \Big[(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta\Big]$, ..... Abréviation $\Rightarrow$..

**5.** Montrons que : $\vdash (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha})$.
**Il y'a une erreur dans la série, le théorème à démonter est le précédent.**
**Preuve :**

(1) $(x \vee y) \Rightarrow (y \vee x)]$, ..... Théorème 13.

(2) $(\overline{\alpha} \vee \beta) \Rightarrow (\beta \vee \overline{\alpha})]$, ..... Substitution $(x := \overline{\alpha}, y := \beta)$.

(2) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha})$, ..... Abréviation $\Rightarrow$.

**6.** Montrons que : $\vdash \alpha \Rightarrow \Big[\overline{\beta} \Rightarrow \overline{(\alpha \Rightarrow \beta)}\Big]$.
**Preuve :**

(1) $x \vee (y \vee z) \Leftrightarrow (x \vee y) \vee z$, ..... Théorème 6.

(2) $\Big[x \vee (y \vee z) \Rightarrow (x \vee y) \vee z\Big] \wedge \Big[(x \vee y) \vee z \Rightarrow x \vee (y \vee z)\Big]$, ..... Définition $\Leftrightarrow$.

(3) $\Big[(x \vee y) \vee z \Rightarrow x \vee (y \vee z)\Big]$, ..... Règle V.

(4) $\Big[(\overline{\alpha} \vee \overline{\overline{\beta}}) \vee \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)}\Big] \Rightarrow \overline{\alpha} \vee (\overline{\overline{\beta}} \vee \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)})$, ..... Substitution $(x := \overline{\alpha}, y := \overline{\overline{\beta}}, z := \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)})$.

(5) $\beta \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}$, ..... Théorème de la question 2.

(6) $(\overline{\alpha} \vee \beta) \Rightarrow (\overline{\alpha} \vee \overline{\overline{\beta}})$, ..... Règle IV.

(7) $\overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)} \vee (\overline{\alpha} \vee \overline{\overline{\beta}})$, ..... Définition $\Rightarrow$.

(8) $(\overline{\alpha} \vee \overline{\overline{\beta}}) \vee \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)}$, ..... Règle III.

(9) $\overline{\alpha} \vee \Big[\overline{\overline{\beta}} \vee \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)}\Big]$, ..... Modus Ponen (8, 4).



(10) $\alpha \Rightarrow \Big[\overline{\beta} \vee \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)}\Big]$, ..... Définition de $\Rightarrow$.

(11) $\alpha \Rightarrow \Big[\overline{\beta} \Rightarrow \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)}\Big]$, ..... Définition de $\Rightarrow$.

(12) $\alpha \Rightarrow \Big[\overline{\beta} \Rightarrow \overline{(\alpha \Rightarrow \beta)}\Big]$, ..... Définition de $\Rightarrow$.

**7.** Montrons que : $\vdash (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \Big[(\overline{\alpha} \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta\Big]$.
**Preuve :**

(1) $(\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow \Big[(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta\Big]$; ..... Théorème démontré dans la question 4.

(2) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha})$, ..... Théorème démontré dans la question 5.

(3) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \big[(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta\big]$, ..... Règle S(1,2).

(4) $(\overline{y} \Rightarrow \overline{x}) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$, ..... Théorème 5.

(5) $(\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}) \Rightarrow (\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)$, ..... Substitution $x := \overline{\beta}, y := \alpha$.

(6) $(\beta \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})$, ..... Théorème de la question 2.

(7) $(\overline{\overline{\alpha}} \vee \beta) \Rightarrow (\overline{\overline{\alpha}} \vee \overline{\overline{\beta}})$, ..... Règle IV.

(8) $(\overline{\alpha} \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})$, ..... Abréviation de $\Rightarrow$ .

(9) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (\overline{y} \Rightarrow \overline{x})$, ..... Théorème 5.

(10) $\big[(\overline{\overline{\alpha}} \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})\big] \Rightarrow \big[(\overline{\overline{\alpha}} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}) \Rightarrow (\overline{\overline{\alpha}} \Rightarrow \beta)\big]$, ... $x := (\overline{\alpha} \Rightarrow \beta); y := (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})$.

(11) $(\overline{\overline{\alpha}} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}) \Rightarrow (\overline{\overline{\alpha}} \Rightarrow \beta)$, ..... Modus Ponen (8,10).

(12) $\big[\beta \vee (\overline{\overline{\alpha}} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})\big] \Rightarrow \big[\beta \vee (\overline{\overline{\alpha}} \Rightarrow \beta)\big]$, ..... Règle IV.

(13) $(x \vee y) \Rightarrow (y \vee x)$, ..... $(H.A.)_3$.

(14) $\big[(\overline{\overline{\alpha}} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}) \vee \beta\big] \Rightarrow \big[\beta \vee (\overline{\overline{\alpha}} \vee \overline{\overline{\beta}})\big]$, ..... Substitution $x := (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}); y := \beta$.

(15) $\big[(\overline{\overline{\alpha}} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}) \vee \beta\big] \Rightarrow \big[\beta \vee (\overline{\overline{\alpha}} \Rightarrow \beta)\big]$, ..... Règle S(14, 12).

(16) $\big[(\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}) \Rightarrow \beta\big] \Rightarrow \big[\beta \vee (\overline{\overline{\alpha}} \Rightarrow \beta)\big]$, ..... Abréviation $\Rightarrow$.

(17) $\big[\beta \vee (\overline{\overline{\alpha}} \Rightarrow \beta)\big] \Rightarrow \big[(\overline{\overline{\alpha}} \Rightarrow \beta) \vee \beta\big]$, ..... Substitution $(x := \beta; y := (\overline{\overline{\alpha}} \Rightarrow \beta))$ dans $(H.A.)_3$.

(18) $\big[(\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}) \Rightarrow \beta\big] \Rightarrow \big[(\overline{\overline{\alpha}} \Rightarrow \beta) \vee \beta\big]$, ..... Règle S(16, 17).

(19) $\big[(\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}) \Rightarrow \beta\big] \Rightarrow \big[(\overline{\alpha} \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta\big]$, ..... Abréviation $\Rightarrow$.

(20) $\big[(\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}) \Rightarrow (\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)\big] \Rightarrow \big[(\overline{\overline{\beta}} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})\big]$, ... Substitution $(x := (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}), y := (\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)$.

(21) $\big[(\overline{\overline{\beta}} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})\big]$, ..... Modus Ponen (5, 20).

(22) $\big[\beta \vee (\overline{\overline{\beta}} \Rightarrow \alpha)\big] \Rightarrow \big[\beta \vee (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})\big]$, ..... Règle IV.

(23) $\big[(\overline{\overline{\beta}} \Rightarrow \alpha) \vee \beta\big] \Rightarrow \big[\beta \vee (\overline{\overline{\beta}} \Rightarrow \alpha)\big]$, ..... Substitution $(x := (\overline{\overline{\beta}} \Rightarrow \alpha); y := \beta)$ dans $(H.A.)_3$.

(24) $\big[(\overline{\overline{\beta}} \Rightarrow \alpha) \vee \beta\big] \Rightarrow \big[\beta \vee (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})\big]$, ..... Règle S(22, 23).

(25) $\left[\beta \vee (\overline{\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\beta}})\right] \Rightarrow \left[(\overline{\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\beta}}) \vee \beta\right]$, ..... Substitution $(x := \beta; y := (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\beta}))$ dans $(H.A.)_3$.

(26) $\left[(\overline{\overline{\beta} \Rightarrow \alpha}) \vee \beta\right] \Rightarrow \left[(\overline{\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\beta}}) \vee \beta\right]$, ..... Règle S(24, 25).

(27) $\left[(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta\right] \Rightarrow \left[(\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\beta}) \Rightarrow \beta\right]$, ..... Abréviation $\Rightarrow$.

(28) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \left[(\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\beta}) \Rightarrow \beta\right]$, ..... Règle S(3, 27).

(29) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \Big[(\overline{\alpha} \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta\Big]$, ..... Règle S(28, 19).

**Exercice 3 :**
On a le système d'axiomes suivant :

$$\begin{cases} A_1 : \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha); \\ A_2 : \Big[\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)\Big] \Rightarrow \Big[(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)\Big]; \\ A_3 : (\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta); \\ \text{Modus Ponen} : \vdash \alpha \text{ et } \vdash \alpha \Rightarrow \beta \text{ alors, } \vdash \beta. \end{cases}$$

**1.** Montrons que : $\vdash \alpha$, on déduit $\vdash (\beta \Rightarrow \alpha)$, ..... $\mathcal{R}_1$.
**Preuve :**

(1) $\vdash \alpha$, ..... Hypothèse.
(2) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$, ..... $A_1$.
(3) $(\beta \Rightarrow \alpha)$, ..... Modus Ponen (1, 2).

**2.** Montrons que de $\vdash (\alpha \Rightarrow \beta)$, et $\vdash (\beta \Rightarrow \gamma)$, on déduit $\vdash (\alpha \Rightarrow \gamma)$, ..... $\mathcal{R}_2$.
**Preuve :**

(1) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$, ..... $A_1$.
(2) $\Big[\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)\Big] \Rightarrow \Big[(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)\Big]$, ..... $A_2$.
(3) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$, ..... Modus Ponen (1, 2).
(4) $\alpha \Rightarrow \beta$, ..... Hypothèse.
(5) $\alpha \Rightarrow \gamma$, ..... Modus Ponen (4, 3).

**3.** Montrons que de $\vdash \Big[\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)\Big]$, on déduit $\vdash \beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$, ..... $\mathcal{R}_3$.
**Preuve :**

(1) $\Big[\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)\Big]$, ..... Hypothèse.
(2) $\Big[\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)\Big] \Rightarrow \Big[(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)\Big]$, ..... $A_2$.
(3) $\Big[(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)\Big]$, ..... Modus Ponen (1, 2).
(4) $\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$, ..... $A_1$.
(5) $\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$, ..... $\mathcal{R}_2$ appliquée à (4) et (3).



**Exercice 4 :**
Démontrons en utilisant les résultats de l'exercice précédent les théorèmes suivants :

**1.** $(q \Rightarrow r) \Rightarrow \Big[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\Big]$. C'est le théorème 17 qu'on va démontrer avec les axiomes de l'exercice 3.
**Preuve :**

(1) $\Big[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\Big] \Rightarrow \Big[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\Big]$, ..... Substitution $(\alpha := p, \beta := q, \gamma := r)$ dans $A_2$.
(2) $(q \Rightarrow r) \Rightarrow \Big[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\Big]$, ..... Substitution $(\alpha := (q \Rightarrow r), \beta := p$ dans $A_1$.
(3) $(q \Rightarrow r) \Rightarrow \Big[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\Big]$, ..... $\mathcal{R}_2$ appliquée à (2) et (1).

**2.** $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \Big[(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\Big]$. C'est le théorème 16 qu'on va démontrer avec les axiomes de l'exercice 3.
**Preuve :**

(1) $(q \Rightarrow r) \Rightarrow \Big[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\Big]$, ..... Théorème démontré précédemment dans la question 1.
(2) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \Big[(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\Big]$, ..... $\mathcal{R}_3$ appliquée à (1).